ТИХООКЕАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Серия "ТВОРЧЕСКОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО:
научные сообщения"

В. А. Дубко

НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ
МЕТОД ТРАЕКТОРИЙ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

Серия «Творческое сотрудничество: научные сообщения»

В. А. Дубко

Надежность систем
Метод траекторий

Текст лекции

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2008

УДК 519.21
ББК В 171
Д 794

Дубко В. А.
Д 794 Надежность систем. Метод траекторий : текст лекции / В. А. Дубко. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2008. – 9 с. (Сер. «Творческое сотрудничество: научные сообщения»).
ISBN 978-5-7389-0660-2

В лекции рассматривается метод, названный методом траекторий, который позволяет рассчитывать надежность любых (в том числе и мостиковых) соединений, не только на плоскости, но и в пространстве. Этот алгоритм показывает, что нахождение надежности системы может быть выполнено на основе определения надежности последовательно соединенных комбинаций из этих элементов. Независимость не является необходимым условием.

Для преподавателей.

УДК 519.21
ББК В 171

ISBN 978-5-7389-0660-2

В стандартных курсах теории вероятностей ограничиваются расчетом надежности параллельных и последовательных соединений, а также схем, которые сводятся к их комбинациям. При этом предполагается независимость состояний элементов схем.

Существуют соединения элементов, которые не могут быть сведены к группам параллельных и последовательных соединений. Примером может служить мостиковая схема.

Метод, который мы называем *методом траекторий*, рассмотренный в лекции, позволяет рассчитывать надежность любых соединений, не только на плоскости, но и пространственных. Этот алгоритм показывает, что нахождение надежности системы может быть выполнено на основе определения надежности последовательно соединенных комбинаций из этих элементов. Независимость не является необходимым условием.

НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМЫ

Пусть задан некоторый набор элементов $j=\overline{1,n}$ (событий) которые образуют систему (последовательность) с одним «входом» и «выходом». Обозначим через A_i событие, которое состоит в том, что i - элемент системы работает, а через C – событие, отражающее факт работоспособности всей системы.

Определение 1. Надежностью элемента A_j системы называют вероятность $P(A_j)$ его безотказной работы на временном интервале T.

Надежность элемента A_j полагается известной.

Определение 2. Надежностью системы называют вероятность P(C) ее безотказной работы на временном интервале T.

Задача расчета надежности систем сводится к необходимости выразить надежность системы через надежность составляющих элементов (блоков).

"Классические схемы"

1. Системы из последовательно соединенных элементов.

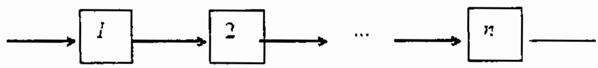


Рис. 1

Обозначим через p_i надежность *i-того* элемента, а через P=P(C) - надежность блока системы.

Такая система будет работать только тогда, когда все элементы работают:

$$P = P(C) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Если работа каждого из блоков не влияет на работу других, то согласно теореме умножения вероятностей независимых событий, вероятность безотказной работы такой системы определяют по формуле:

$$P = P(C) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \prod_{i=1}^{n} p_i \qquad (1)$$

2. Системы из параллельно соединенных элементов.

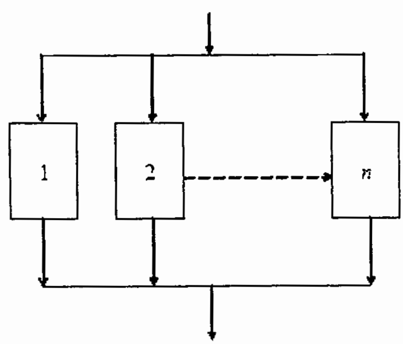


Рис. 2

Обозначим через q_i вероятность выхода из строя за время T *i-того* элемента. Пусть P=P(C) - надежность системы. Такая система будет работать, если хотя бы один элемент остается работоспособным. Если работа каждого из блоков не влияет на работу других, то вероятность P(C) безотказной роботы системы будет определяться следующим образом:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i. \qquad (2)$$

Множество систем можно рассматривать как комбинации из последовательно или параллельно соединенных блоков, надежность которых рассчитывают по формулам (1) и (2).

Пример 1. Прибор состоит из двух блоков, соединенных последовательно и работающих независимо. Вероятность отказа блоков соответственно равны 0.05 и 0.08. Найти Вероятность $P(\bar{C})$ отказа прибора .

Решение. Отказ прибора – событие, противоположное событию его безотказной работы. Вероятность безотказной работы блоков будут:

$$p_1 = 1-0.05=0.95 , \qquad p_2 = 1 - 0.08 = 0.92.$$

Вероятность безотказной работы прибора, в соответствии с формулой (1), будет: $P(C) = 0.95 \cdot 0.92 = 0.874$ и следовательно, искомая вероятность

$$P(\bar{C}) = 1 - 0.874 = 0.126$$

“Неклассическая” схема соединения

Траекторный метод расчета надежности

Рассмотрим схему соединения, изображенную на Рис. 3.

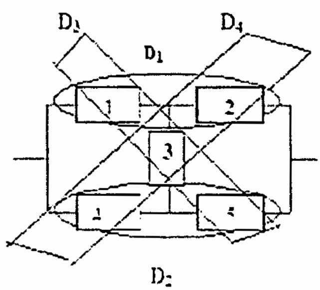


Рис.3

Обозначим через A_j событие, состоящее в том, что *j-ый* блок работает, $j = \overline{1,5}$.

Эта схема не может быть представленной каким–либо преобразованием из укрупненных блоков, состоящих только из параллельно или последовательно соединенных элементов. В данном случае необходимо рассматривать событие С (схема работает) как событие в n =5 - мерном пространстве. События A_j в этом *5-мерном пространстве реализаций траекторий* имеют вид:

$$A_1=(A_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4,\Omega_5),\qquad A_2=(\Omega_1,A_2,\Omega_3,\Omega_4,\Omega_5),\qquad A_3=(\Omega_1,\Omega_2,A_3,\Omega_4,\Omega_5),$$

$$A_4=(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,A_4,\Omega_5),\qquad A_5=(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4,A_5).$$

Отметим, что при пересечении событий такого типа, пересекаются только события в скобках с одинаковым расположением в ряду последовательностей.

Например,

$$A_3\cap A_5=(\Omega_1,\Omega_2,A_3,\Omega_4,\Omega_5)\cap(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4,A_5)=(\Omega_1,\Omega_2,A_3,\Omega_4,A_5).$$

При объединении такая формальная операция не будет правильной (см. Приложение 1).

Отметим, так же, что в данном случае полная группа событий, на каждом из подпространств состоит только из двух событий:

Принцип согласованности заключается в том, что выполняются следующие равенства:

$$P(A_1)=P((A_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4,\Omega_5))=P(A_1);\quad P(A_2)=P(A_2);\ \dots\ ;P(A_3\cap A_5)=P((A_3,A_5)).$$

Таким образом, вероятность достоверных событий при реализации последовательности не влияет на вероятность возможных событий в реализации.

Тогда событие С определяется соотношением:

$$C=\bigcup_{j=1}^{5} D_j,$$

где

$$D_1=A_1\cap A_2,\quad D_2=A_4\cap A_5,\quad D_3=A_1\cap A_3\cap A_5,\quad D_4=A_2\cap A_3\cap A_4.$$

Воспользуемся теоремой об объединении (сумме) событий:

$$P(C)=P(\bigcup_{j=1}^{5} D_i)=P(D_1)+P(D_2)+P(D_3)+P(D_4)-P(D_1\cap D_2)-$$

$$-P(D_1\cap D_3)-P(D_1\cap D_4)-P(D_2\cap D_3)-P(D_2\cap D_4)-P(D_3\cap D_4)+P(D_1\cap D_2\cap D_3)+$$

$$+P(D_1\cap D_2\cap D_4)+P(D_2\cap D_3\cap D_4)-P(D_1\cap D_2\cap D_3\cap D_4)\qquad(3)$$

где:

$$D_1 \cap D_2 = A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 ; \qquad D_1 \cap D_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5 ;$$

$$D_1 \cap D_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 ; \qquad D_2 \cap D_3 = A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 ;$$

$$D_2 \cap D_4 = A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 ; \qquad D_3 \cap D_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = K;$$

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = K; \qquad D_1 \cap D_2 \cap D_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = K;$$

$$D_1 \cap D_3 \cap D_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = K;$$

$$D_2 \cap D_3 \cap D_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = K;$$

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = K.$$

С учетом этих соотношений, (3) приобретает вид:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_5) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \\ &- P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \\ &- P(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - \\ &- P(K) + P(K) + P(K) + P(K) + P(K) + P(K) - P(K). \end{aligned}$$

Если события независимы в совокупности, то, воспользовавшись принципом согласованности, приходим к выражению:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1)\,P(A_2) + P(A_4)\,P(A_5) + P(A_1)\,P(A_3)\,P(A_5) + \\ &+ P(A_2)\,P(A_3)\,P(A_4) - P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_4)\,P(A_5) - P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\,P(A_4) - \\ &- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + 2\prod_{j=1}^{5} P(A_j). \end{aligned}$$

Пусть все события A_j – равновозможные: $P(A_j) = p,\ \forall\ j = \overline{1,5}$, - то приходим к следующей формуле для расчета надежности рассмотренной схемы на Рис.3 :

$$P(C) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5.$$

Проверка. Пусть $p=1$, тогда необходимо чтобы и $P(C)=1$. Проверяем:

$$P(C) = 2 + 2 - 5 + 2 = 1.$$

Замечание 1. *Расчет надежности мостиковой схемы приведен в статье К. Шеннона (в соавторстве) «Надежные схемы из ненадежных элементов», русский перевод которой (с.114 - 153) есть в книге:*

Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Москва, 1963. Из-во ИЛ. 830 с.

Использовалось предположение, что вероятности состояния каждого из элементов схемы – независимы и одинаковы (с.119, 123).

Замечание 2. *Траекторной метод позволяет рассчитывать надежность системы не только на плоскости, но и для пространственных соединений.*

Можно привести примеры и других схем, которые не сводятся к параллельным или последовательным соединениям. Но в любом случае надежность системы может быть найдена, как и в рассмотренном примере, методом траекторий.

Приложение

Последовательность событий

Пусть $\Im_e = \left\{ A^l{}_j \right\}_{j=1}^{k_l}$ - алгебра наблюдаемых событий на пространстве элементарных событий Ω_l. Ω_l - соответствует и достоверному событию.

Стохастический эксперимент заключается в фиксации появления последовательности событий из наборов $\left\{ \mathrm{A}^l{}_j \right\}_{j=1}^{k_l}$, $l = \overline{1,n}$, в условиях некоторого составного стохастического эксперимента в n – мерном пространстве:

$$\Im = \Im_1 \times \Im_2 \times \ldots \times \Im_n ,.$$

Чтобы различить проекции этих событий на разные подпространствах $\Im_l$, введем обозначения:

$$\mathrm{A}_j(l) = \left(\Omega_1, \ldots, A^l{}_j, \ldots, \Omega_n \right),$$

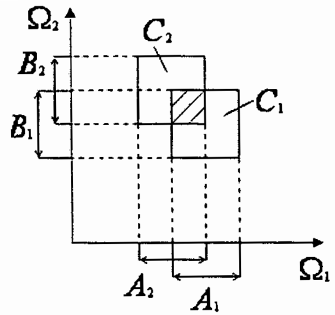
При пересечении событий такого типа, пересекаются только события в скобках с одинаковым расположением в ряду последовательностей.

Например. $A_1, A_2 \in \Im_1$, $B_1, B_2 \in \Im_2$, Тогда

$$C_1 = \left(A_1, B_1 \right),\ C_2 = \left(A_2, B_2 \right) \in \Im = \Im_1 \times \Im_2 ,$$

и

$$C_1 \cap C_1 = \left(A_1, B_1 \right) \cap \left(A_2, B_2 \right) = (A_1 \cap A_1,\ B_2 \cap\ B_2)$$



При объединении такая формальная операция, как видно из диаграммы, не будет правильной.

В этих обозначениях ***реализация*** последовательности событий в условиях данного стохастического может быть представлена как пересечение событий $\mathrm{A}_j(l)$.

Учебное издание

Валерий Алексеевич Дубко

НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ. МЕТОД ТРАЕКТОРИЙ

Текст лекции

Печатается с авторских оригиналов

Подписано в печать 14.07.08. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая. Гарнитура «Таймс».
Печать цифровая. Усл. печ. л. 0,52. Тираж 100 экз. Заказ 178.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Отдел оперативной полиграфии издательства Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

ДУБКО Валерий Алексеевич

Математик. Доктор физико-математических наук, профессор. Профессор кафедры прикладной математики Национального авиационного университета (г.Киев).

С 1976 г. разрабатывает вопросы теории случайных процессов и ее применение: теория стохастических дифференциальных уравнений, связанных с задачами диффузионной аппроксимации и существования сохраняющихся функционалов для открытых систем, в том числе и с ограниченным количеством элементов в условиях сильных возмущений. Методические работы связаны с поиском технологий эффективного обучения.

Основные научные результаты

Для нелинейного уравнения уравнений Ланжевена динамики броуновской частицы решена основная проблема теории броуновского движения, построено диффузионное приближение и установлены границы применимости диффузной аппроксимации (1976-1984). На основе введенного понятия о когерентном случайном воздействии и предложенной трактовки интегрирования по случайных многообразиям сформулированы элементы стохастической механики, доказан ряд теорем-аналогов теоретической механики, теории инвариантов (1980-2007). Построены уравнения для стохастических первых интегралов обобщенных уравнений Ито, формула дифференцирования сложной функции (обобщение формула Ито - Вентцеля (2002)), исследованы условия существования неслучайных первых интегралов, притягивающих многообразий (1978, 1998, 2000, 2002), построены уравнения для нахождения континуума автоморфных преобразований для произвольных многомерных функций (2003-2004).

В работах смежного характера были предложены методика определения и применения системных законов при моделировании реальных систем, механизм организации живых систем, организма запоминания (1984-1991), алгоритм передачи и приема потока информации, позволяющего судить о его содержательности после прохождения сильно стохастизирующей среды (1995).

Совместно с учениками построены контрпримеры канонической теории иерархических систем для случая многоэлементных систем с сильными связями (1996), стохастические уравнения динамики цепи (глобулы) (1998).

Автор 3 монографий.

Основные публикации

Дубко В. А. Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений. Киев, 1978.

Дубко В. А. Интегральные инварианты для одного класса стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 1.

Дубко В. А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток, 1989.

Дубко В. А. Метод диффузионной аппроксимации в исследовании и построении моделей стохастических динамических систем. Владивосток, 1994.

В поисках скрытого порядка / В. А Дубко, Ф. Н. Рянский и др. Владивосток, 1995.

Дубко В. А. Интегральные инварианты уравнений Ито и их связь с некоторыми задачами теории случайных процессов // Докл. НАН Украины, 2002. №1.

Дубко В. А. Моделирование динамики реальных процессов / Эколого-географические проблемы природопользования нефтегазовых регионов: Теория, методы и практика. Докл. III Междунар. науч.-практ. конф. Нижневартовск, 2007.